TAHMİN PROBLEMİNE GİRİŞ

Bir araştırmada **“kitle”** aynı özellikteki birimlerin ya da bireylerin oluşturduğu topluluğa verilen isimdir. İstatistiğin temel amaçlarından biri ilgilenilen kitle hakkında bilgi sahibi olmaktır. Yani kitlenin bilinmeyen özellikleri ile ilgili tahminlerde bulunmaktır. Kitlenin bu bilinmeyenlerine **“parametre”** denir. Parametre kitleyi tanımlayan sayısal değerlerdir. Kitle ortalaması, kitle varyansı parametreye örnek olarak verilebilir. Kitlenin parametresi yaygın olarak θ ile gösterilir. Kitle parametresi için farklı gösterimler de mevcut olduğu gibi, kitlenin birden fazla parametresi de olabilir. Örneğin normal dağılım için kitle ortalaması μ, kitle varyansı ise σ^2 ile gösterilir.

Parametrelere ilişkin tahminlerin gerçekleşmesi tamamen rastgele olan deneylerin sonucuna bağlıdır. Tek bir deneyle istatistiki bir sonuca varmak doğru olmadığı için deneyler tekrar edilir. Bir deney aynı koşullarda tekrarlandığında aynı sonuç gözlenmeyebilir (Akdi, 2010).

Birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip $X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenlerine **“örneklem”** denir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonu f(x;θ) olan kitleden bir örneklem olsun. Bu durumda örneklemin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_{X_1}(x_1) \,.\, f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Örneklemin herhangi bir fonksiyonuna **“istatistik”** denir. Eğer örneklemin bir fonksiyonu olan bu istatistik, parametreyi (yada parametreleri) tahmin etmek için kullanılıyorsa **“tahmin edici”** adını alır. Tahmin edicinin aldığı değere **“tahmin”** denir.

TAHMİN EDİCİLERİ ELDE ETME YÖNTEMLERİ

Literatürde birçok tahmin edici elde etme yöntemi mevcuttur. Bu yöntemler arasından yaygın olarak bilinen yöntemler aşağıdaki gibidir:

- Momentler Yöntemi
- En Çok Olabilirlik Yöntemi

MOMENTLER YÖNTEMİ

Momentler tahmin edicilerinin bulunabilmesi için önce kitle momentlerinin var olması gerekir. Momentler tahmin edicileri, kitle momentlerinin hesaplanıp örneklem momentlerine eşitlenmesiyle bulunur. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonu f(x;**θ**) olan bir kitleden örneklem olsun. Kitle momentleri dağılımın parametrelerinin sayısına bağlıdır.

1. kitle momenti E(X)
2. kitle momenti E(X^2)
3. kitle momenti E(X^3)

⋮

k. kitle momenti E(X^k)

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde örneklem momentleri

1.örneklem momenti $m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2.örneklem momenti $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

3. örneklem momenti $m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$

⋮

k. örneklem momenti $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$

şeklinde hesaplanır.

Kitlenin k tane parametresi olduğunda 1. örneklem momenti 1.kitle momenti ile; 2.örneklem momenti 2. kitle momenti ile,…,k. örneklem momenti ile k. kitle momenti eşitlenip,

$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

$\vdots$

$E(X^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$

bu eşitliklerin çözülmesi ile parametrelerin momentler tahmin edicileri elde edilir.

Örnek:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Düzgün(0,θ) olan dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun. θ parametresinin momentler tahmin edicisini bulunuz?

Çözüm:

X~Düzgün (0,θ) ise X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & dd \end{cases}$$

şeklindedir. 1. kitle momenti

$$E(X) = \int_0^\theta x\,\frac{1}{\theta}\,dx = \frac{\theta}{2}$$

1.örneklem momenti

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

dir. 1. kitle momentinin 1. örneklem momentine eşitlenmesiyle θ parametresinin momentler tahmin edicisi

$$E\,(X) = m_1$$

$$\frac{\hat{\theta}}{2} = \bar{X}$$

$$\hat{\theta} = 2\bar{X}$$

şeklinde bulunur.

EN ÇOK OLABİLİRLİK YÖNTEMİ

En çok olabilirlik yöntemi tahmin edicileri elde etme yöntemleri arasında en popüler olanıdır. Bu yöntemin en önemli özelliklerinden biri elde edilen tahmin edicilerin asimptotik olarak yansız ve küçük varyanslı olmalarıdır. Dezavantajı ise bazı durumlarda tahmin edicilerin elde edilmeleri sırasındaki maksimizasyon problemlerinin çözümünde sıkıntılar çekilmesidir.

Tanım: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örneklemi olasılık (yoğunluk) fonksiyonu f(x;θ) olan kitleden alınan bir örneklem olmak üzere θ parametresi için olabilirlik fonksiyonu

$$L\,(\theta\,;x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f\,(x_i\,;\theta)$$

şeklindedir. Bu olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değer θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Yani θ ‘nın en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underset{\theta \pounds \theta}{max} L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Genellikle olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesi yerine fonksiyonun logaritması maximize edilir. Bu fonksiyon log L(θ ; $x_1, x_2, \ldots, x_n$) şeklindedir.

Örnek: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x\,;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & ,x>0,\theta>0\\ 0\ , & dd\end{cases}$$

şeklinde verilen θ parametreli Üstel dağılıma sahip olsun. θ parametresinin en çok tahmin edicisini bulunuz?

Çözüm: Olabilirlik fonksiyonu

$$L\,(\theta;x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n\,;\theta)$$

$$= \frac{1}{\theta}\,.\,e^{-\frac{x_1}{\theta}}\ \ldots\ \frac{1}{\theta}\,.\,e^{-\frac{x_n}{\theta}}$$

$$= \frac{1}{\theta^n}\,.\,e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Olabilirlik fonksiyonunun ln i alındığında

$$\ln L\,(\theta;x_1,x_2,\ldots,x_n) = -n\ln(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ve bu fonksiyonun θ parametresine göre türevi alınıp 0 ‘a eşitlendiğinde

$$\left.\frac{\partial \ln L(\theta;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

$$-\frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\theta}^2} = 0$$

$$-n\hat{\theta}+\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\hat{\theta} = \bar{X}$$

elde edilir. θ parametresine göre ikinci türev alındığında

$$\left.\frac{\partial^2\ lnL(\theta;x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\ n\left(-\frac{1}{\theta^2}\right) - \frac{2\theta\sum_{,=1}^{n}x_i}{\widehat{\theta\bar{X}^3}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{n}{\bar{X}^2} - \frac{2n\bar{X}}{\bar{X}^3}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{n}{\bar{X}^2} - \frac{2n}{\bar{X}^2} = -\frac{n}{\bar{X}^2} < 0$$

olduğundan $\hat{\theta} = \bar{X}$, θ parametresi için En Çok Olabilirlik tahmin edicisidir.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.

(6) Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H. Ve Karabulut, İ. (2006). Parametre Tahmini ve Hipotez Testi, Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

(7) Casella, G. ve Berger, R.L. (2002). Statistical Inference, Second Edition, Duxbury.